

LOGARITMUSOS FELADATOK HIBAANALÍZISE, OKOK ÉS HIBATÍPUSOK

ERROR ANALYSIS OF LOGARITHMIC PROBLEMS: CAUSES AND ERROR TYPES

KELECSÉNYI Klára, OSZTÉNYINÉ KRAUCZI Éva

Abstract: In our research, we investigated how we can categorise the errors made by first-year university students in logarithmic tasks. We conducted a survey among first-year engineering students of computer science and logistics engineering at Neumann János University. A short self-made test was used for the research. Logarithmic errors were categorized into classes based on a two-dimensional categorization, the type of error and its possible source. We found that the two-dimensional categorization was able to classify most of the typical logarithmic errors listed in the literature, as well as new errors. As a result of our investigation, it became clear that it is not possible to categorise the types of occurring errors without identifying the underlying sources of these errors. As a general suggestion for similar studies, it is worthwhile to use multidimensional categorization, where one aspect tries to reveal the underlying source or problem solving strategy in addition to the visible error type.

Keywords: logarithm, error analysis, university education, mathematics education

1. Bevezetés

A logaritmus használata megkerülhetetlen a természettudományos vagy közgazdasági tanulmányokat folytató diákok számára. A logaritmus számos területen hasznos és széles körben alkalmazható, például a pH-értékek kiszámításához, a grafikonok logaritmikus skálázásához, az adattömörítésben, kamatlábak meghatározásához stb.

A diákok különböző matematikai kompetenciákkal érkeznek az egyetemre. A logaritmus használata tipikusan olyan terület, ahol a beérkező hallgatók képességei között nagy különbségek vannak. Eddig a bevezető matematika kurzusok célja az volt, hogy kisimítsák az egyes diákok közötti különbségeket, azokon a területeken, amelyekre az egyetemi matematika építene. Mivel 2024-től a Magyarországon középszinten érettségizők kötelező tananyagában már csak a logaritmus definíciója szerepel, a 2024/25-ös tanévtől kezdődően a logaritmus tanítása nagyobb figyelmet igényel.

A logaritmus fogalmának megértése számos nehézséget okoz, ahogyan azt több kutató is megállapította (Chua & Wood, 2005; Kelecsényi et al., 2023; Kenney & Kastberg, 2013; Mulqueeny, 2012; Weber, 2016; Williams, 2011). A szokásos tankönyvek hagyományosan Euler indirekt definíciója alapján mutatják be a logaritmust:

Egy kifejezés adott bázishoz tartozó logaritmusát úgy definiálják, mint azt a kitevőt, amelyre a bázist emelni kell ahhoz, hogy az adott kifejezést megkapjuk, azaz $\log_a(b) = c$ pontosan akkor, ha $a^c = b$.

A definíció nem követi a fogalom történeti és ismeretelméleti fejlődését, így ez a diákok számára azonnal hozzáférhetetlenné teszi a fogalom megértését. Úgy gondoljuk, hogy a tanulók által elkövetett hibák vizsgálata hasznos módszer lehet arra, hogy megértsük ezen nehézségek forrását.

A hibaanalízis hatékony eszköz lehet mind az oktatók, mind a kutatók számára. Segítségével megjósolhatók a hallgatók által elkövetett későbbi hibák, megmagyarázhatók, hogy a hallgatók hogyan és miért követik el őket és segítség a tanításunk során a téves elképzelések feloldásában (Olivier, 1989). Az elkövetett hibák alapján tudunk következtetni az érintett kognitív struktúrára, vagy adott esetben a struktúrában rejlő hiányosságra.

A hallgatók logaritmusos feladatok megoldása közben elkövetett hibáiban gyakran látunk közös mintát. A szakirodalomban a matematikai feladatok során elkövetett hibák típusa szerinti osztályozásra jó keretrendszer található Movshovitz-Hadar és társai (1987) munkájában. A hibák lehetséges forrásainak kategorizálására és magyarázatára azonban nem találtunk jó példát. Így a kutatási kérdésünk a következő:

Hogyan tudjuk kategorizálni az elsőéves egyetemista hallgatók által a logaritmusos feladatok esetében elkövetett hibák típusát és a hibák lehetséges okait figyelembe véve?

Vizsgálatunk eredményeként megpróbáljuk kategorizálni az elsőéves egyetemisták logaritmusfeladatoknál elkövetett hibáit egy kétdimenziós kategorizálás alapján, a hibák típusának és lehetséges forrásainak osztályozásával.

2. Irodalmi áttekintés

Matematikai feladatmegoldásban elkövetett hibák osztályozására és csoportosítására tettek kísérletet Movshovitz-Hadar és társai (1987), azaz általános hibatípusokat adtak meg. Ebben az esetben a kérdéskört a matematika didaktika szemszögéből közelítjük meg. Movshovitz-Hadar és társai (1987) a matematikai feladatmegoldás közben elkövetett hibákat 6 kategóriába sorolták típusuk szerint: (i) helytelenül használt adatok, (ii) értelmezésből eredő hibák, (iii) logikailag helytelen következtetések, (iv) helytelen definíció- vagy tételhasználat, (v) ellenőrizetlen megoldás és (vi) technikai hibák. Középszintű feladatok körében logaritmussal kapcsolatos hibaanalízissel néhány tanulmány foglalkozott (Ganesan és Dindyal, 2014; Rafi és Retnawati, 2018) Movshovitz-Hadar és társai (1987) munkájára építve. Ezekben a tanulmányokban a logaritmusos feladatokban elkövetett hibák mindig csak típus szerint voltak csoportosítva. Ganesan és Dindyal (2014) a fenti 6 kategóriából négyet azonosított: (i) helytelenül használt adatok, (iv) helytelen definíció vagy tétel használat, (v) ellenőrizetlen megoldás és (vi) technikai hibák. Később Rafi és Retnawati (2018) megerősítették az eredményeiket.

A másik megközelítés szerint a hibák kategorizálásának lehetősége magából a matematikából származik. Olivier (1989) néhány feladatmegoldás közbeni téves elképzelést és annak forrását mutatta be, azaz általános okokat keresett. Hibaanalízissel kapcsolatos munkák közül kifejezetten logaritmussal foglalkozik Chua és Wood (2005), akik a logaritmus megértési szintjeit adták meg és a hibák gyakori okát kategorizálták. Egy logaritmusos hibaanalízishez tartozó elméleti keretet Chua és Wood (2005) adott meg. Hibaforrásként a következő három okot jelölték meg: (i) fogalmak, szabályok és előfeltételek hiányos elsajátításából eredő hibák, (ii) a túlzott általánosításból eredő hibák, (iii) egyéb (megfejtetlen hibák, hibás számtani számításból eredő hibák, hibás algebrai manipulációk, találgatásból eredő hibák és olvashatatlan kézírás).

További cikkek a diákok logaritmussal kapcsolatos megértési szintjeit azonosították, emellett a hibákat felsorolták. Hoon és társai (2010) részletes, 15 hibát tartalmazó listát adtak az egyes kategóriákhoz, felsorolták az olyan téves elképzelésekkel kapcsolatos hibákat, mint az antilogaritmus és a logaritmus azonosságok, valamint a műveletekkel kapcsolatos hibákat, mint a helytelen bázisváltás vagy a logaritmus elhagyása.

De Gracia (2016) 15 alternatív elképzelést sorolt fel a matematikából kiemelkedőek, illetve fejlesztésre szoruló középszintű feladatok körében, amelyek szisztematikus hibákat okoznak az exponenciális és logaritmusfeladatok megoldásában. Ezen kategóriák közül kilenc a logaritmusra vonatkozik. Ide tartozik az antilogaritmusról alkotott téves elképzelés; a logaritmus helytelen átfűzése exponenciális alakra és fordítva; a logaritmus azonosságok; a logaritmus inverzének és kölcsönösen egyértelműségének helytelen használata; és a logaritmusos jelölés egyszerű törlése vagy a logaritmus változóként való kezelése.

Más kutatók problémamegoldó stratégiákat próbáltak megadni, emellett fő hibacsoportokat azonosítottak. Aziz és mtsai (2017) azonosították a főiskolai hallgatók által használt leggyakoribb hibákat és stratégiákat logaritmikus feladatok megoldása során. A következő stratégiákat azonosították, amelyeket a hallgatók logaritmusproblémák megoldása során használnak, mint például (i) a logaritmus alapjának átalakítása, (ii) a logaritmus számolási folyamatként való értelmezése (iii) a részsámítások kihagyása, (iv) csak egyes részsámítások elvégzése és (v) kikötések ellenőrzése. A hibák fő forrását a tanulók logaritmusfogalmának rugalmatlansága, a számtani számolási hibák és a korábbi algebrai fogalmak helytelen használata okozta. A hibák 4 típusát azonosították, úgymint (i) a logaritmus definíciójával, (ii) a szimbolikus manipulációval, (iii) a logaritmusos egyenletekkel és (iv) a logaritmus grafikonjával és a logaritmus-függvénnyel kapcsolatos hibák.

3. Elméleti keretrendszer

Olivier különbséget tesz a csúszások, a hibák és a téves elképzelések között. A csúszásokat a feldolgozásból adódó figyelmetlenség eredményeként azonosítja. Ezek nem szisztematikusak, könnyen felismerhetők és korrigálhatók. Ezzel szemben a hibák a tervezésből adódnak, és rendszeresen, azonos helyzetekben jelennek meg. A hibák a téves elképzelések jelei, mivel a mögöttes kognitív struktúrában lévő szisztematikus fogalmi hibákban gyökereznek (Olivier, 1989).

Ezért először kiválogattuk a figyelmetlenségből eredő hibákat, melyeket Olivier után csúszásoknak nevezünk. Ezek okait nem kerestük, mivel a meglévő információk alapján nem megadhatók. Ilyen hibák tipikusan a másolási hibák, például a feladatban megadott $1/3$ szorzótényező helyén $1/2$ szerepel a hallgató feladatmegoldásában.

A hiba analízisünk egyik alapját Movshovitz-Hadar, Zaslavsky és Inbar (Movshovitz-Hadar és mtsai, 1987) kategorizálása adja. Az általunk használt logaritmusos feladat jellegéből adódóan csak 4 kategória jelenik meg a Movshovitz-Hadar-féle 6 kategóriából. Ezek a (i) **helytelenül használt adatok**, (ii) az **értelmezésből eredő hibák**, (iv) a **helytelen definíció- vagy tételhasználat** és (vi) a **technikai hibák**. Ezeket a kategóriákat nevezzük mi hibatípusoknak.

A **helytelenül felhasznált adatok** olyan helyzetekre vonatkoznak, amikor a feladatban megadott és a tanulók által használt adatok között eltérés van. Ilyen hiba, amikor olyan információt tekint adottnak a feladatmegoldó, ami nem volt megadva, és nem is következett a megadottakból; a megoldáshoz szükséges adat figyelmen kívül hagyása és a hiány kompenzálása irreleváns adat hozzáadásával; olyan mennyiség kiszámítása, ami felesleges; egy fogalom olyan tulajdonsággal való felruházása, amely nem az ő sajátja. A szerzők az információk helytelen másolásából eredő hibákat is ideszámították, ezeket azonban mi csúszásként kódoltuk.

Az **értelmezésből eredő hibák** azok a matematikai hibák, amelyek az egyik (esetleg szimbolikus) nyelven leírt matematikai tények egy másik (esetleg szimbolikus) nyelvre történő helytelen fordításából adódnak. Ilyen hiba a helytelenül lefordított kifejezésekkel kapcsolatos hibák (természetes nyelvből matematikai nyelvre) vagy a helytelen matematikai formalizmus használata, azaz egy matematikai fogalom jelölése egy olyan szimbólummal, amit más matematikai fogalomra használunk.

A **helytelen definíció- vagy tételhasználat** egy adott definíció vagy tétel torzításából eredő hibákat jelöli. Ilyen hiba egy tételnek a feltételeken kívüli alkalmazása. Például a disztributív tulajdonság alkalmazása egy nem-disztributív függvény vagy művelet esetében. Egy definíció vagy tétel helytelen felidézése szintén ebbe a kategóriába tartozik.

A **technikai hibák** az elemi matematikai fogalmakkal kapcsolatos számítási hibákra, valamint az elemi algebrai szimbólumokkal való manipulációkra, például a zárójelek elhagyására vonatkoznak.

A hibatípusok mellett egy második elemzési dimenziót is alkalmaztunk, nevezetesen megpróbáltuk feltárni a hibák lehetséges okait is. Olivier (1989) szerint a hibák gyakran azért fordulnak elő, mert a tanulók megpróbálják korábbi tudásukat egy új helyzetben alkalmazni. Bár a korábbi sémák (az egymással összefüggő elképzelések egysége) alkalmazása támogathatja az új ismeretek elsajátítását, vannak olyan esetek, amikor ezek a korábbi sémák akadályozzák az új fogalom helyes kialakulását. A konstruktivista tanuláselméletek szerint a tanulás a tanulók korábbi sémái és az új fogalmak közötti kétféle, egymással összefüggő kölcsönhatást foglal magában, az asszimilációt és az akkomodációt.

Olivier szerint a téves elképzelések gyakran a korábban ismert fogalmak tulajdonságainak túlzott általánosítása miatt következnek be. A korábbi sémák szükséges akkomodációja helyett az új fogalmat egyszerűen asszimilálják a korábban meglévő sémákba. Ezen elképzelés szerint az új fogalom elsajátításakor a hibák oka a következő okok miatt következhet be: (1) nehézségek magával az új fogalommal kapcsolatban, (2) nehézségek az új fogalomnak a tanuló korábbi sémáiba való beépítésében, (3) korábbi hibás sémák vagy (4) valamilyen ismeretlen ok. Így négy kategóriát azonosítottunk a hibák forrásaként. Ezek (i) a *fogalom és tulajdonságainak torzulása*, (ii) a *fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének a torzulása*, (iii) a *korábbi hibás sémák* és (iv) a *nem beazonosítható okok*.

1. táblázat. A diákok által elkövetett hibák típusainak és lehetséges okainak kategorizálása

<i>Lehetséges okok</i> A hibák típusai	<i>Fogalom és tulajdonságainak torzulása</i>	<i>Fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének a torzulása</i>	<i>Korábbi hibás sémák</i>	<i>Nem beazonosítható okok</i>
Helytelenül használt adatok				
Értelmezésből eredő hibák				
Helytelen definíció- vagy tételhasználat				
Technikai hibák				

Az alábbi két alfejezetben bemutatjuk a kétdimenziós osztályozásunk dimenzióit: a hibatípusokat, illetve a hibák lehetséges okait.

A hibatípusok kategorizálása, altípusok

A helytelenül használt adatok esetében egy új hiba altípussal talákoztunk, amit szintén ide kódoltunk, ezek a becslésből eredő hibák. Ennél az altípusnál a megadott adatokból nem következő adatok használatát látjuk. Az elhagyja a logaritmus altípust is ide soroltuk, mivel a logaritmusnak olyan tulajdonságot tulajdonítanak, amely nem a sajátja. Ez az altípus már korábbi (de Gracia, 2016; Hoon és mtsai, 2010) cikkekben is előfordult. A további egyedi hibákat az egyéb hibák altípusba soroltuk.

Az értelmezésből eredő hibák esetében kettő, jól elkülönülő altípust azonosítottunk be. Az egyik a formálisan hibás tételhasználat, a másik a részszámítások helytelen formalizmusa.

Helytelen definíció- vagy tételhasználat esetében a definíció használatával kapcsolatos hibákat 3 altípusba soroltuk: definíció torzulása, a fogalom hibás értelmezése és egyéb hibák. A hibás tételhasználatnál az összeg vagy különbség, illetve a kitevőre vonatkozó azonosság helytelen használata altípusokat különítettük el.

A technikai hibák esetében pedig a számolási hibák, zárójeles hibák és egyéb hibák altípusok jelentek meg a diákok munkáiban.

A hibáknak ezek az altípusai nyilvánvalóan nem fedik le az összes lehetőséget, csak erre az elemzésre jellemzőek, de elég jó képet adnak a hibák lehetséges altípusairól.

A hibák lehetséges okai

A lehetséges okok szerint az első kategória a *fogalom és tulajdonságainak torzulása*. Ebben a vizsgálatban alapvetően a logaritmus fogalmával kapcsolatos hibákat vizsgáltuk. Így azon hibák lehetséges okaként adtuk meg ezt a kategóriát, ahol nem találtunk kapcsolatot a logaritmussal kapcsolatos hiba és a korábbi sémák között. Itt feltételeztük, hogy maga a logaritmus fogalmának, illetve tulajdonságainak hibás értelmezésével talákoztunk.

A második kategória a *fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása*. Olyan hibák okaként adtuk meg ezt a kategóriát, ahol korábbi helyes sémák túláltalánosítása látható a logaritmus fogalmára vagy tulajdonságaira, ahogyan azt Chua és Wood (2005) is említi. Ez a túlzott általánosítás a logaritmus fogalmára és tulajdonságaira egyaránt vonatkozik. Olivier (1989) ezt a túláltalánosítást azzal magyarázta, hogy a meglévő sémák nem alkalmazkodnak a logaritmus új fogalmához és tulajdonságaihoz, hanem a tanulók egyszerűen csak asszimilálják az új információt anélkül, hogy korábbi sémáik rendszerét átszerveznék (5. o.). Következésképpen az algebrai tulajdonságokra vonatkozó korábbi sémák alkalmazása a logaritmus esetében helytelen eredményekhez vezet.

A harmadik kategória a *korábbi hibás sémák használata*. Itt a mi vizsgálatunkban az alapl műveletekkel kapcsolatos torzulások, nyelvi formalizmussal kapcsolatos torzulások, illetve a feladat jellegéből adódóan a kizárás elvének helytelen használata jelentek meg lehetséges okokként. Ez nyilván nem jelenti azt, hogy a tanulók nem rendelkeznek más, a fogalommal kapcsolatos hibás sémákkal, de az adott feladat hibás megoldásai csak ezeket a kategóriákat tárták fel.

A negyedik kategóriába pedig a *beazonosítatlan okok* kerültek, melyek számunkra nem felismerhetőek vagy több ok is lehetett a hibák forrása.

4. Módszer

Kutatásunk során teszteltettük hallgatók logaritmus fogalmával és azonosságaival kapcsolatos ismereteiket.

Kutatási minta

A tesztet a Neumann János Egyetem GAMF Műszaki és Informatikai Kar első éves, Alapozó Matematika kötelező tárgyat teljesítő mérnök informatikus és logisztikai mérnök szakos hallgatói közül 156-an oldották meg. A felmérés a 2019/20-as tanév őszi félévében történt meg. Akkor még ennek a tantárgynak a célja a középiskolai matematikai ismeretek átisméltése volt, többek között a logaritmus fogalmának és tulajdonságainak felelevenítése is. A hallgatók 6 párhuzamos tankörben, heti két, 45 perces gyakorlat keretében dolgoztak. A hallgatóknak a második dolgozat keretében kellett a logaritmussal kapcsolatos tudásukról számot adni, így arra kértük a hallgatókat, hogy egy extra feladatot oldjanak meg, amit a hibaanalízishez használtunk. Körülbelül 10 perc alatt kellett megoldaniuk a feladatot.

A feladatok összeállítása

A feladat összeállításánál az alábbiakat tartottuk szem előtt:

1. A feladat az argumentumok rendezésével megoldható legyen.
2. A feladatban szereplő logaritmusos kifejezések rendezéséhez a logaritmus azonosságok használatát ne lehessen megkerülni.
3. A kifejezések pontos értékét számológép nélkül ne lehessen feltétlenül kiszámolni.
4. Rövid legyen, mert be kellett illeszteni a kurzus keretei közé.

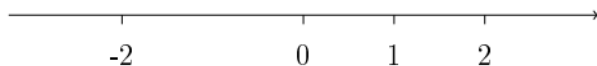
Technikai okokból négy csoport ugyanazt a feladatot kapta, két csoport pedig egy ettől különböző feladatot. A diákok csak az egyik feladatot oldották meg. A két feladat a következő volt.

Egyik feladat: Állítsa növekvő sorrendbe a következő kifejezéseket számológép használata nélkül!

$$\log_3 7 + \log_3 2; \quad \log_3 17 - \log_3 2; \quad 2 * \log_3 2; \quad \frac{1}{2} \log_3 25 - \frac{1}{3} \log_3 8$$

Másik feladat: Kösse össze a kifejezéseket a számegyenesen megjelölt négy érték közül a megfelelővel! Számológép használata nélkül oldja meg a feladatot!

$$\log_5 30 - \log_5 6; \quad \frac{1}{3} \log_5 \frac{27}{125} - \log_5 \frac{3}{5}; \quad 2 \log_5 \frac{1}{5}; \quad \log_5 5 + \frac{1}{2} \log_5 25$$



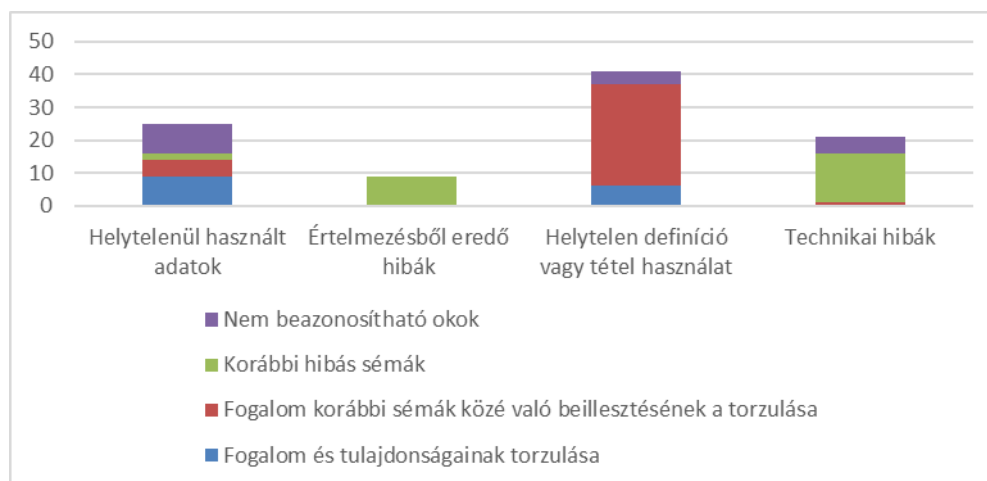
Az adatok feldolgozása

Összesen, a kurzuson részt vevő 173 hallgatóból 156 oldotta meg valamelyik feladatot. Minden megoldást felhasználtunk a kategorizáláshoz. A kategorizálást a szerzők egymástól függetlenül végezték.

Az eredményeket addig finomítottuk, amíg közös megállapodásra nem jutottunk. Az eredmények fejezetben példákat találunk arra, hogyan történt a kategorizálás.

5. Eredmények

Ebben a fejezetben a diákoktól kapott 156 megoldásban található hibák kategorizálását mutatjuk be. Először a felmérésben tapasztalt hibák eloszlását mutatjuk be. A 156 hallgató összesen 96 hibát vétett. Emellett 9 csúszást találtunk, amit a hibaelemzésből kivettünk. A 4 hibatípus, amit a Movshovitz-Hadar 6 kategóriájából használtunk a helytelenül használt adatok, az értelmezésből eredő hibák, a helytelen definíció- vagy tételhasználatból eredő hibák és a technikai hibák. Ezekhez a hibatípusokhoz tartozó gyakoriságok (arányok) rendre a következők: 25 (26,04%), 9 (9,37%), 41 (42,71%) és 21 (21,88%). Az okok hibatípusokon belüli eloszlását az 1.a ábra tartalmazza.



1.a ábra. A hibatípusok eloszlása és a hibák okainak a hibatípusokon belüli eloszlása

Legnagyobb arányban az eltorzult definíció- vagy tételhasználatból eredő hibák fordultak elő, összesen 41 darab. A vizsgálatukban jól elkülönültek a logaritmus fogalmával kapcsolatos hibák, és a logaritmussal kapcsolatos tételek használatából adódó hibák, melyekből rendre 9 és 32 volt. A definíció torzulásából eredő hibák esetében 3 a fogalom és tulajdonságainak torzulásából, 3 a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulásából valamint 3 beazonosíthatatlan okból származott. Az eltorzult tételhasználatból eredő hibák esetében az összegre vagy különbségre vonatkozó azonosság használata 26 esetben volt helytelen. 3 esetben maga a tételhasználat torzult, 23 esetben pedig a korábbi sémák közé való beillesztés. A kitevőre vonatkozó azonosság helytelen használata 6 esetben fordult elő. Ebből 5 hiba forrása a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása, 1 pedig beazonosíthatatlan ok.

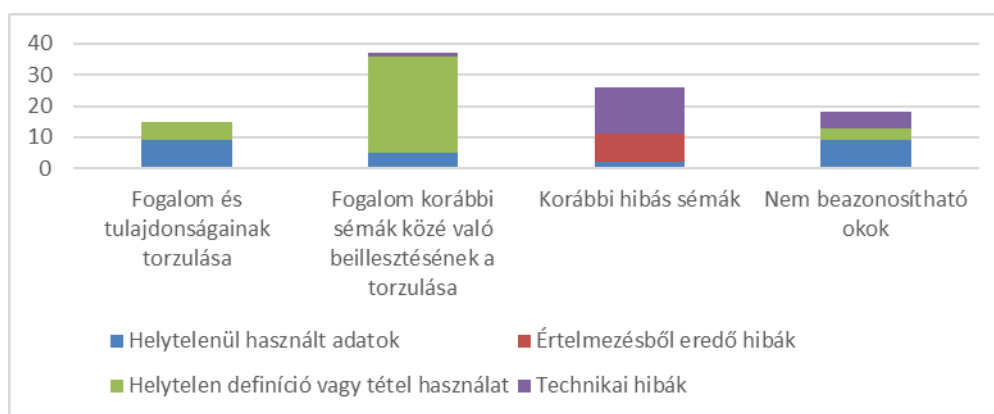
A második legnépesebb hibatípus a helytelenül használt adatok kategóriája 25 hibával. Ezen kategórián belül találtunk egy új hibacsoportot, a becslésből eredő hibák csoportját. 4 beazonosíthatatlan

okból eredő ilyen hibát találtunk. A becslésből eredő hibák vizsgálata további kutatást igényelne. Ilyen típusú hibát korábbi kutatások során nem azonosítottak. Kérdéses, hogy itt csupán a feladat megfogalmazása miatt jelent meg ez a hibatípus, vagy általánosabb jelenséggel van dolgunk. 9 hibát kódoltunk az elhagyja a logaritmust kategóriába. Ezek közül 4 hiba tartozik fogalom és tulajdonságainak torzulása, 4 hiba a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása, 1 pedig beazonosíthatatlan ok kategóriába. Az egyéb hibák közé 12 hibát soroltunk. Mind a 4 ok előfordult forrásként, rendre 5, 1, 2 és 4 darab. Meglepő egyedi hibákat találtunk ebben a kategóriában, melyeket részletesen egy későbbi cikkben szeretnénk bemutatni.

A harmadik csoport, a technikai hibák csoportja 21 hibát tartalmaz. 13 számolási hibát találtunk, ebből 9 forrása a korábbi hibás sémák használata volt, 4 pedig beazonosíthatatlan okból történt. További 6 esetben zárójel hiányát tapasztaltuk. 2 egyéb hiba forrása a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása és beazonosíthatatlan ok volt.

Az értelmezésből eredő hibák száma 9 volt. Ezek megoszlása a következő: 5 formálisan hibás tételhasználat, 4 pedig a részszámítások helytelen formalizmusa. Mind a 9 a korábbi hibás sémák alkalmazására vezethető vissza.

A hibák okok szerinti eloszlása a 4 kategória szerint a fogalom és tulajdonságainak torzulása, a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása, a korábbi hibás sémák és a beazonosíthatatlan okok. Ezek rendre a következő gyakoriságokkal fordultak elő: 15 (15,63%), 37 (38,54%), 26 (27,08%) és 18 (18,75%). Az interjú hiányának tudható be a beazonosíthatatlan okok nagy aránya. A hibák eloszlását típus és okok szempontjából a 2. táblázat tartalmazza. A lehetséges okokon belüli hibatípusok eloszlását az 1.b ábra tartalmazza.



1.b ábra. A hibaokok eloszlása és a hibák típusainak a hibaokokon belüli eloszlása

2. táblázat. A hibák típusainak és okainak eloszlása

Csúsások		9					
Lehetséges okok A hibák típusai		Fogalom és tulajdonságának torzulása	Fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének a torzulása	Korábbi hibás sémák	Nem beazonosítható okok	össz	össz
	Helytelen definíció	A definíció torzulása	3				3
A fogalom hibás értelmezése			3			3	
Egyéb					3	3	

Helytelen tétel	Összeg vagy különbség	3	23			26	
	Kitevő		5		1	6	
Helytelenül használt adatok	Becslési hiba				4	4	25
	Elhagyja a logaritmust	4	4		1	9	
	Egyéb hiba	5	1	2	4	12	
Értelmezésből eredő hibák	Formálisan hibás tételhasználat			5		5	9
	Rékszámítá-sok hibás formalizmusa			4		4	
Technikai hibák	Számolási hiba			9	4	13	21
	Zárójeles hiba			6		6	
	Egyéb hiba		1		1	2	
össz		15	37	26	18	96	96

A fejezet további részében a hibák részletes elemzése található.

A helytelenül felhasznált adatok

Ebbe a kategóriába kódoltuk a becslésből adódó hibákat, mivel ezekben az esetekben a hallgató egy extra adatot adott a feladathoz. Azaz a kiszámítandó logaritmusos kifejezéseket a feladatmegoldás során a hallgatók jól beazonosítható módon megbecsülték, azonban a becslés eredménye lényegesen eltér a keresett értéktől. Lehetséges okai ennek a hibának számunkra beazonosíthatatlan ok volt. Például egy hallgató az alább megadott közelítő értékekkel dolgozott:

$$\log_3 2 \approx \frac{1}{5}; \log_3 4 \approx \frac{1}{4}; \log_3 7 \approx \frac{1}{2}; \log_3 8 \approx 2; \log_3 17 \approx 2,5; \log_3 25 \approx 3$$

Találtunk egy hibacsoportot, amelyet az “elhagyja a logaritmust” névvel kódoltunk. Ezt a hibatípust más kutatók is azonosították (de Gracia, 2016; Hoon és mtsai, 2010). Ebbe a csoportba azokat a hibákat soroltuk, melyek esetében látható, hogy nem a logaritmus definícióját akarja használni a feladat megoldója, mégis a számolás egy pontján eltűnik a logaritmus. Ekkor az egyik lehetséges ok a fogalom és tulajdonságainak torzulása, nevezetesen a logaritmus függvény monotonitása miatt a logaritmosos kifejezések rendezéséhez “elég az argumentumokat rendezni” elv torzult. Például ez látható az alábbi megoldásban a 2.a ábrán.

$$\log_5 30 - \log_5 6 = \frac{30}{6} = 5$$

$$\frac{1}{3} \log_5 \frac{6^3}{125} - \log_5 \frac{3}{5} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{\frac{5}{3}}$$

$$2 \log_5 \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

2.a ábra. A logaritmus tulajdonságainak torzulása miatt elhagyja a logaritmust

$$\frac{\log_5 30}{\log_5 6} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\frac{\log_5 \frac{3}{5}}{\log_5 \frac{3}{5}} = \frac{15}{15} = 1$$

2.b ábra. A korábbi sémák túláltalánosítása miatt hagyja el a logaritmust

Másik lehetséges ok a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása. Azon hibák esetében, ahol ezt az okot jelöltük meg forrásnak, a korábbi sémák logaritmusra való túláltalánosítása található. A hallgatók egyszerűsítenek valamilyen formában a logaritmussal, pedig az adott szituációban nem lehetne. A 2.b ábrán például szorzótényezőként kezelik.

A 2.c és d ábrán pedig teljesen más módon történik meg az egyszerűsítés. "Ha az argumentum tartalmazza a logaritmus alapszámát, akkor azzal egyszerűsíthetünk" hibás elv szerint dolgoznak a hallgatók. Ez arra utal, hogy a logaritmus fogalma a műveleti sorrend sémába nem jól épült be.

$$\log_5 \frac{(2 \cdot 5)^{\frac{1}{3}}}{\frac{3}{5}} = \frac{(2 \cdot 5^{-3})^{-5}}{\frac{3}{5}}$$

2.c ábra. A korábbi sémák túláltalánosítása miatt hagyja el a logaritmust

$$\log_5 ((5)^{-1})^{\frac{1}{3}} = (1^{-1})^{\frac{1}{3}}$$

2.d ábra. A korábbi sémák túláltalánosítása miatt hagyja el a logaritmust

Emellett abban az esetben, amikor nem sikerült megtalálnunk a hiba forrását, a hiba a beazonosíthatatlan ok kategóriába került.

A harmadik hibacsoport a minden további, eddig fel nem sorolt hibát egyéb hibák néven tartalmazza. Itt található extra adat hozzáadása, illetve fogalmak olyan tulajdonságokkal való felruházása, melyek nem ezek sajátjai. Lehetséges okként mind a 4, fent említett ok megtalálható.

$$\log_5 30 - \log_5 6$$

$$\log_5 (6)^5 - \log_5 6$$

$$5 \log_5 6 - \log_5 6 = 4 \log_5 6$$

2.e ábra. A fogalom és tulajdonságainak torzulásából eredő hibás adat

Az első hibaforrása a fogalom és tulajdonságainak torzulása. Azokat a hibákat kódoltuk ide, melyek esetében azt feltételezzük, hogy a hibás adat oka a logaritmus fogalmával, azonosságaival kapcsolatos.

A 2.e ábrán látható példában a $30 = 6^5$ hibát a logaritmus generálja. A $6 \cdot 5$ helyett a 6^5 kifejezés használatát az indokolja, hogy a kitevőként szereplő 5 a logaritmus esetén szorzótényezővé alakul és így egyszerűsödik a teljes kifejezés értéke.

A második hibaforrás a fogalom korábbi sémák közé való beilleszkedésének torzulása. Például a 2. f ábrán a hallgató egyenletként kezeli a logaritmusos kifejezéseket és az argumentumok közös tényezőjével leegyszerűsíti, vagyis olyan tulajdonsággal ruhazza fel a kifejezést, amely nem az övé, túláltalánosítja az egyenletrendezési sémáját logaritmusos kifejezésekre.

$$\log_5 30 - \log_5 6 = \log_5 5 - \log_5 1$$

$$\frac{1}{3} \log_5 \frac{27}{125} - \log_5 \frac{3}{5} = \frac{1}{3} \log_5 \frac{9}{25} - \log_5 \frac{1}{1}$$

2.f ábra. A korábbi sémák túláltalánosítása miatti hibás adat

Találtunk egy nagyon érdekes hibát, amely a 2.h ábrán. A korábbi sémák torzulása miatt egy exponenciális kifejezés értékének meghatározásához lineáris interpolációt alkalmaz egy hallgató.

$$\begin{array}{ccc} 3^2 = 9 & & \\ 3^3 = 27 & & \\ & \nearrow & \\ & 15 & \\ & \searrow & \\ & x & \end{array} \quad \frac{1}{3}$$

$$3^x = 15$$

$$x = 2 + \frac{1}{3}$$

2.h ábra. A korábbi hibás sémák miatti hibás adat

Az értelmezésből eredő hibák

Az általuk vizsgált hibákban az ebbe a kategóriába tartozó hibák a matematikai nyelvezet hibás használataként, hibás formalizmusként jelentek meg. Két hibacsoportot különböztettünk meg. Mindkettő forrása a korábbi hibás sémákban, a nyelvi formalizmus torzulásában keresendő. Az egyik hibacsoport formálisan hibás tételhasználat nevet kapta. Az ilyen hibát tartalmazó megoldásokban a logaritmusos kifejezések különbségére vonatkozó azonosság formálisan rossz használatát tapasztaltuk, például a következő esetben:

$$\log_5 30 - \log_5 6 = \frac{\log_5 30}{\log_5 6} = \log_5 5.$$

A másik hibacsoport a részsámítások helytelen formalizmusa. Ezekben a hibákban az egyenlőségjel jelentése torzul. Azaz nem azt jelenti, hogy a két kifejezés értéke megegyezik, hanem az “én most számolok” jelzésére szolgál, például:

$$\log_5 \frac{30}{6} = \frac{30}{6} = 5 = \log_5 5.$$

A 3. ábrán mindkét hiba együttes előfordulása látható.

$$\frac{\log_5 30}{\log_5 6} = \frac{30}{6} \cdot 5 \Rightarrow \log_5 5 = 1$$

3. ábra. Korábbi hibás sémák miatt értelmezésből eredő hiba

6. Téves definíció- vagy tételhasználat

Egy hibaelemzés során általában ebbe a kategóriába tartozik a legtöbb hiba. A mi vizsgálatunkban is ezt tapasztaltuk. Mivel jól szétvááltak a fogalom definíciójával és a fogalomra vonatkozó tételekkel kapcsolatos hibák, így külön-külön elemeztük őket.

A logaritmus definíciójával kapcsolatos hibák első hibacsoportja a definíció torzulása, azaz az exponenciális kifejezéssé való átírása hibás valamilyen módon. A hibák forrása minden egyes esetben a fogalom és tulajdonságainak torzulása. Egy példa a 4.a ábrán látható.

$$\log_5 (5^{-2})$$

~~5 = 27 \cdot 5^{-2} = x^5~~

4.a ábra. A definíció torzulása

A második hibacsoport a fogalom hibás értelmezése. Ebbe a kategóriába azok a hibák tartoznak, amelyek esetében a definíciót egy korábbi fogalom (nem az exponenciális) segítségével akarják átírni. A hiba forrása a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása. Például az egyik

dolgozatban $\log_3 4 = \sqrt{2}$, $\log_3 9 = \sqrt{3}$, $\log_3 25 = \sqrt{5}$ értelmezéssel találkoztunk, egy másikban

pedig \log_3 értelmezése az volt, hogy az argumentumot hárommal kell osztani.

A harmadik hibacsoportba az egyéb hibák kerültek. Ezekben a hibákban a definíció használatra utaló jelek találhatóak, de az eltorzulásuk oka számunkra beazonosíthatatlan. Példa a 4.b ábrán látható.

$$\log_5 5 + \frac{1}{2} \log_5 25 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 5$$

4.b ábra. Hibás definíció használat

A tételhasználattal kapcsolatos hibák esetében az első hibacsoport az összegre vagy különbségre vonatkozó azonosság helytelen használata. Az egyik lehetséges oka ezeknek a hibáknak a fogalom és tulajdonságainak torzulása. Ezekben az esetekben a logaritmusos kifejezések összege vagy különbsége a kifejezések szorzatává vagy hányadosává íródtak át.

$$\log_5 30 - \log_5 6 = \underline{\underline{\log_5 24}}$$

4.c ábra. Eltorzult különbségre vonatkozó azonosság

A másik lehetséges ok a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása. Kettő jól elkülönülő hiba került ebbe a kategóriába. Az egyiket az azonosság olyan irányú használatában tapasztaltuk, amikor a két logaritmusos kifejezésből egy kifejezéssé íródik át a feladat. Ekkor az argumentumok között elvégzendő művelet ugyanaz maradt, mint a kifejezések közötti. A 4.c ábrán egy tipikusan hibás megoldás látható.

A másikban a logaritmus hibás beépülését látjuk a műveletek sorrendje sémába. A logaritmus azonosság elvégzése elsőbbséget élvez az 1/3 szorzótényezővel szemben. Ez a hibatípus csak a 4.d ábrán látható módon fordult elő a vizsgálatunkban.

$$\frac{1}{3} \log_5 \frac{27}{125} - \log_5 \frac{3}{5} = \frac{1}{3} \log_5 \frac{27}{125}$$

4.d ábra. Eltorzult tétel használat a műveleti sorrend helytelen értelmezésével

A tétellel kapcsolatos hibák második hibacsoportja a kitevőre vonatkozó azonosság helytelen használata. A hibák forrása a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása vagy számunkra beazonosíthatatlan ok volt. Például az első hibaforráshoz kódoltuk az

$\frac{1}{2} \log_3 25 = \log_3 \left(\frac{1}{2} * 25 \right)$ hibát, ahol a logaritmikus kifejezés szorzótényezője az argumentum szorzótényezője lesz az azonosság használata közben. Ebbe a kategóriába tartozó hiba mind ilyen

alakban fordult elő. A második ehhez a forráshoz tartozó $\frac{1}{2} \log_3 25 = \sqrt{\log_3 25}$ hiba esetében a

gyökvonás séma túláltalánosítását véltük felfedezni. Az $\frac{1}{3} * \log_5 \frac{27}{125} = \log_5 \left(\frac{27}{125} * \left(\frac{1}{3} \right)^5 \right)$ hiba, ahol a logaritmus szorzótényezője az argumentum szorzótényezője lesz a logaritmus alapja hatványkitevővel számunkra eldönthetetlen okból keletkezett.

7. *Technikai hiba*

Ebben a kategóriában az első hibacsoport a számolási hibák nevet kapta.

A számolási hibák esetében az egyik hibaforrás a korábbi hibás sémák lehet. Azokat a hibákat kódoltuk ide, melyek esetében nem találtunk kapcsolatot a logaritmus fogalmával és tulajdonságaival,

csak az alpműveletekkel kapcsolatos torzulások a hiba okai. Például $2 * (-1) = 1$ vagy $3 * \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ ilyen forrású hiba.

A másik hibaforrás a beazonosíthatatlan ok volt. Ezekben az esetekben vagy nem egyértelmű vagy nem beazonosítható a forrás.

A második hibacsoport a zárójeles hibák. Ezen hibák forrása a korábbi hibás sémáknál, a nyelvi formalizmus torzulásában keresendő. Tipikus példa a hiba analízisünkben a 5.a ábrán látható.

$$\log_5 \frac{27}{125} \frac{1}{3}$$

5.a ábra. Zárójeles hiba

A harmadik hibacsoport az egyéb hibákat tartalmazza. Forrása a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása, vagy beazonosíthatatlan ok. Az 5.b ábrán erre látunk példát.

$$\frac{3}{6} \log_3 75 - \frac{2}{6} \log_3 16 = \frac{1}{6} \log_3 \frac{75}{16}$$

5.b ábra. A fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása miatti egyéb technikai hiba

8. Összegzés, következtetések

A dolgozatban megpróbáltuk jellemezni a logaritmussal kapcsolatos félreértések, félreértelmezések manifesztációit, a feladatmegoldás során megjelenő hibákat. Vizsgálatunk során kétdimenziós kategorizálással osztályoztuk a hibák típusait és okait. A hibák típusai szerint 4 nagy kategóriát találtunk a Movshovitz-Hadar-féle 6 kategóriájából (Movshovitz-Hadar és mtsai, 1987). Ezek a helytelenül használt adatok, az értelmezésből eredő hibák, a helytelen definíció- vagy tételhasználat és a technikai hibák. Másik dimenzióként a hibák oka/forrása szerint a fogalom és tulajdonságainak torzulása, a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének a torzulása, a korábbi hibás sémák és a nem beazonosítható okok kategóriákat azonosítottuk. Sikertült feltárunk néhány korábban nem vizsgált gyakori hibatípust, különösen a helytelenül felhasznált adatok kategóriájában. Ezek a becslési hibák, interpolációs hiba, illetve a logaritmus-függvény az exponenciális függvénynek egy érdekes módon vett inverz relációjának értelmezése. Az "elhagyja a logaritmus" hibatípussal már korábbi cikkekben (de Gracia, 2016; Hoon és mtsai, 2010) is találkoztunk. Mivel itt az okok mögöttes vizsgálata elmaradt, ezért nehéz rekonstruálni az alkalmazott módszert a megadott leírás alapján.

Az elemzett hibák mellett találtunk néhány érdekes stratégiát is, amelyet a diákok alkalmaztak, például a becslést és az interpolációt. A dolgozatnak nem volt célja az alkalmazott megoldási stratégiák elemzése, de későbbi vizsgálat során érdemes lenne ezeket is részletesebben megvizsgálni.

A csoportosítás során világossá vált, hogy a hibák típusba sorolása önmagában nem vezet eredményre a mögöttes hibaokok feltárása nélkül. Ezzel lehetővé vált a korábban szerteágazó hibakategóriák osztályozása. Ezen tapasztalatok alapján érdemes a hasonló vizsgálatok során többdimenziós kategorizálást alkalmazni, ami sok esetben segítheti az egyértelműbb kategóriák megtalálását. Érdemes a dimenziókat úgy meghatározni, hogy a matematikai témákhoz kapcsolódó szempontok mellett a didaktikai szempontokat is figyelembe tudjuk venni, például ide sorolhatók a mögöttes kognitív struktúrák vagy a használt problémamegoldási stratégiák.

Tanárként dolgozva a hibaanalízis egy jó lehetőség arra nézve, hogy jobban megértsük a diákjaink gondolkodását. Egyrészt kiderül, melyek a kritikus pontok a logaritmus fogalmának megértésében, így a tanítási gyakorlatunk megfelelő változtatására ad lehetőséget. A vizsgálatunkból jól látható, hogy hibák forrása sok esetben a logaritmus fogalmának hibás beépülése a korábbi sémák közé. Ez azt jelenti, hogy különös figyelmet javasolt fordítani a logaritmus és a korábbi algebrai struktúrák összekapcsolására (logaritmus azonosságok, műveleti sorrend, függvény fogalma). Mivel a legtöbb hiba a fogalom korábbi sémák közé való beillesztésének torzulása miatt született, ezért fontos lenne ezt a problémát a tanítás során érinteni. Ehhez elsősorban a kapcsolódó exponenciális azonosságok ismétlését és az inverz műveletek megerősítését javasoljuk. Mivel a hallgatók egyes szaktargyak során találkoztak a logaritmus alkalmazásainak használatával (például: PH-számítás, kamatlábak meghatározása, stb.), ezek is segíthetnek a logaritmus fogalmának a korábbi sémák közé való beillesztésében. A történeti megjegyzések mellett ezen alkalmazások világossá tehetik a logaritmus azonosságok bevezetését (például: egy befektetés értékének megduplázódásához szükséges idő meghatározásakor a hatványozásra vonatkozó logaritmus azonosság használata elengedhetetlen a kapcsolódó egyenlet megoldásához). A korábbi hibás sémák esetén gyakran találkoztunk a számítások hibás formalizmusával. A logaritmushoz kapcsolódó új típusú formalizmus bevezetése feltételezi a korábbi formalizmus készségszintű használatát, valamint használatának igényét is.

Másrészt a hibaanalízis felhívja a figyelmünket arra is, hogy diákjainknak meg kell adni a lehetőséget, hogy tanuljanak a hibáikból. A hibák lehetőséget adnak a téves elképzelések korrigálására.

Bibliográfia

Aziz, T. A., Pramudiani, P., & Purnomo, Y. W. (2017). How Do College Students Solve Logarithm Questions? *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 1(1), 25. <https://doi.org/10.12928/ijeme.v1i1.5736>

Chua, B. L., & Wood, E. (2005). Working with logarithms: Students' misconceptions and errors. *The Mathematics Educator*, 8(2), 53–70.

- de Gracia, R. S. (2016). High school seniors with alternative conceptions on exponents and logarithms. In *13th National Convention on Statistics (NCS)*.
- Ganesan, R., & Dindyal, J. (2014). *An investigation of students' errors in logarithms*. Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Hoon, T. S., Singh, P., & Ayop, S. K. (2010). Working with logarithms. *Malaysian Education Dean's Council Journal*, 6(6), 121–129.
- Kelecsényi, K., Osztényiné Krauczi, É., & Végh, A. (2023). Understanding logarithm in a mathematical card game environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–21. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2268076>
- Kenney, R., & Kastberg, S. (2013). Links in learning logarithms. *Australian Senior Mathematics Journal*, 27(1), 12–20.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3. <https://doi.org/10.2307/749532>
- Mulqueeney, E. (2012). *How do students acquire an understanding of logarithmic concepts?* Kent State University.
- Olivier, A. (1989). Handling pupils' misconceptions. Pythagoras.
- Rafi, I., & Retnawati, H. (2018). What are the common errors made by students in solving logarithm problems? *Journal of Physics: Conference Series*, 1097(1), 012157. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012157>
- Weber, C. (2016). Making logarithms accessible—operational and structural basic models for logarithms. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 69–98.
- Williams, H. R. A. (2011). *A conceptual framework for student understanding of logarithms*. Brigham Young University.

Szerzők

Kelecsényi Klára, Neumann János Egyetem, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Alaptudományi tanszék, Kecskemét (Hungary), e-mail: kelecsenyi.klara@nje.hu

Osztényiné Krauczi Éva, Neumann János Egyetem, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Alaptudományi tanszék, Kecskemét (Hungary), e-mail: osztenyine.eva@nje.hu

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetet mondanak a bírálóknak az értékes megjegyzéseikért és az alapos bírálatért.