

## Horizontok versus valóság a matematika tanításában

**A**pokolba vezető út jó szándékkal van kikövezve. Ezért ha jó szándékkal utat kövезünk, jó lenne tudni, hogy napszámosként melyik utat is kövезzük, és hová vezet az az út, amelynek végén sosem jártunk. (Talán a pokol fenekére?) Legjobb esetben a magunk erőfeszítéséből jutottunk el oda, ahol állunk, és a kikövezendő útnak csak kisebb-nagyobb szakaszát ismerjük. Így csak azt tudhatjuk biztosan, hogy az általunk ismert útszakasz hol tekerгőzik, mit érint, mit mivel köt össze, milyen meglepetéseket rejteget.

A matematika esetében hasonló a helyzet. A matematikában emberfeletti rend uralkodik, ezért az analógia kedvéért tekinthetjük egyfajta Paradicsomnak is. Ide jutnak el a letisztult elmék, akik a dolgok összevisszasága mögött megsejtik a nagyobb léptékű szervezési struktúrát, látják a rendet, s ennek megfelelően működenek. A matematika tanítása ebben az analógiában éppen a Paradicsomba vezető út keresőinek szolgál útmutatóként, kísérőként, jó szándékból készült utcakőként. Fontos kimondanunk (annak ellenére, hogy az előbbi mondatból ez implicite következik), hogy minden keresőnek az útmutató, a kísérő, az utcakő ott szükséges, ahol éppen tart. Analógiánk szintjén a távoli (és állandóan változó) horizont azt próbálja szimbolizálni, ameddig az utat és környékét látjuk, ameddig szükség esetén utat tudunk építeni, a valóság pedig az, ahol éppen járunk, úttól és útminőségtől függetlenül.

Mivel a szakdidaktika – esetünkben a matematika oktatása – bolygónknak ezen a részén sem elismert (következésképpen nem is nagyon ismert) tudomány, a legtöbb ember (akár a tanár is) a matematikatanítással kapcsolatos ismereteit, fogalmait, képzeteket jórészt a köznyelv szintjén terjedő írásokból, facebook bejegyzésekből, rövid hírekből, illetve saját tapasztalatából szerzi, és saját józan eszének szűrőrendszerén át értelmezi. Hofi Géza nem volt kutató a szó szokványos értelmében, mégis azt állapította meg, hogy a világon a legjobban az ész van elosztva, és ezt alá is támasztotta azzal a magyarázattal, hogy mindenki azt hiszi, neki több jutott. Ennek a jelenségnek az érvényességét tudományos kutatás nélkül is látjuk különféle döntések meghozatala során akár a tanügyben, akár az élet más területén. Összekapcsolva az előbbi két gondolatot, és hozzátéve azt, hogy az elmúlt 28 évben 24 különböző tanügyminisztere volt Romániának (ebből 8 az utolsó 5 évben), érthetjük, hogy az elmúlt 28 évben miért volt olyan sok „reform” az oktatásban. A váltások sebességét figyelve az is érthető, hogy az utolsó 5 évre vonatkozóan miért érzi sok tanár, hogy a bürokrácia elhatalmasodott, a lényegi problémákkal nem tudunk törődni, fel sem vállaljuk azokat. Természetesen döntéshozói szintről mindezek

A következő szint a formális dedukció szintje, ahol már az összefüggések, a következtetések megalapozottak, helyesek.

a változások a jó szándék, az előre való elmozdulás jegyében történtek. A valóság az, hogy a rendszer szintjén nem történt pozitív, a diákok és a tanárok mindennapjait pozitívan, motiválóan befolyásoló változás. Sőt ellenkezőleg: a gyermekek egyre kevésbé motiváltak, egyre több szülő veszi ki a gyermekét a rendszerből, a diákok teljesítménye a nemzetközi felméréseken egyre gyengébb, egyre több tanár hagyja el a pályát, a reál szakok esetén a tanár szakos diákok száma nagyon alacsony. Mindez arra utal, hogy a jó szándék ellenére az út nem vezet a Paradicsomba, sőt egyre valószínűbb, hogy inkább a pokolhoz közeledünk. Weöres Sándor soraira gondolva talán nem adja fel mindenki a reményt: „Ha pokolra jutsz, legmélyére térj: az már a menny. Mert minden körbe ér.”

zet a Paradicsomba, sőt egyre valószínűbb, hogy inkább a pokolhoz közeledünk. Weöres Sándor soraira gondolva talán nem adja fel mindenki a reményt: „Ha pokolra jutsz, legmélyére térj: az már a menny. Mert minden körbe ér.”

Az elmúlt évtizedek didaktikai kutatásai alapján (van Hiele, 1986, Clements és Battista, 1992) egyértelművé vált, hogy a tanulási folyamat, amelynek során a gyermek felépíti magának a fogalomrendszerét, az ismeretek hálóját, több fontos fázisból áll. Az első fázisban a tanuló egyfajta *intuitív* szinten áll, a köznyelv fogalmait és szókincsét használja, és a dolgok azonosítása a globális felismerés szintjén működik. A következő szint az *analízis* szintje, ahol a dolgokat (fogalmakat) a jellemzőik elemzése alapján azonosítja. Ezt követi az *informális dedukció* szintje, ahol a fogalmak azonosítása helyes, de az őket összekötő gondolatmenetek, logikai kapcsolatok, következtetések nem teljesen megalapozottak, részlegesek, esetenként akár hibásak is. Ezen a szinten használ a tanuló analógiákat, itt próbál absztrakt fogalmakat felépíteni. A következő szint a *formális dedukció* szintje, ahol már az összefüggések, a következtetések megalapozottak, helyesek. Ezen a szinten a bonyolultabb tulajdonságokat igazoljuk, bizonyítjuk, nemcsak valamilyen (általában hiányos és gyakran téves) analógia alapján elfogadjuk. A következő szint az *axiomatikus felépítés* szintje, ahol az alapfogalmakat értelmezzük, az összes többi tulajdonságot ezek alapján bizonyítjuk. Szintén kutatások támasztják alá, hogy az első fázist megelőzi egy *prekognitív* szint, ahol a dolgokat nem tudatosan ismerjük meg, hanem megtapasztaljuk. Ezeknek a szinteknek néhány fontos jellemzője van, amelyek alapvetően befolyásolják a tanítást. A legfontosabb, hogy minden szintnek saját nyelve van. Ha ezek a nyelvek diszjunktak lennének, akkor nem is volna gond a felismerésükkel, de sajnos nem azok. Így gyakorlatilag ugyanazokat a szavakat használják a különböző szinten levő tanulók, csak persze egészen mást értenek alatta. Előfordulhat, hogy a formális dedukció szintjén a tanár egy gyönyörűen megfogalmazott, összefüggő magyarázatot mutat a diáknak, de mivel a diák az informális dedukció szintjén van, teljesen mást ért abból, mint amit a tanár mondani szeretett volna. Ez az egyik oka annak, hogy a diákok egymástól könnyebben tanulnak, egymás magyarázatát néha könnyebben megértik. Egy másik fontos jellemző, hogy a szinteket nem lehet átugrani, nem kerülhet valaki a prekognitív szintről az analízis szintjére anélkül, hogy az intuitív, nyelvi szinten ne ismerkedne meg a fogalmakkal. Konkrét példaként gondoljuk végig, hogy didaktikai elv-

ként gyakran hallhatjuk, hogy az új ismereteket építsük a diákok meglévő ismereteire. Ha ezt az elvet az előbb vázolt keretrendszer nélkül alkalmazzuk, akkor egy új fejezetnek maximális sebességgel nekivágunk (hisz ebben a témában a gyermeknek semmilyen előismerete nincs, tehát minél hamarabb el kell jutni arra a szintre, amire lehet már építeni), felsoroljuk a fogalmakat, azok értelmezését, és a köztük levő összefüggésekre koncentrálunk. Ez egy nagyon gyakori félreértés, hisz az adott fejezet tartalmával kapcsolatban a diákok lehet, hogy az intuitív szinten, vagy esetleg a prekognitív szinten vannak, és mi egyenesen a formális dedukció szintjén próbálunk velük kommunikálni. Ezek után természetesen csodálkozunk, hogy csak a 2%-uk érti, amit mondunk. A reáltárgyak, főként a matematika abban különbözik a többi tárgytól, hogy matematikából az optimális működéshez minimálisan a dedukció szintje kellene, míg nagyon sok más tárgy esetén a diákok optimálisan tudnak fejlődni az informális dedukció szintjén is. Sajnos a tankönyvek, a tananyag, a tanterv is arra van berendezve, hogy a dedukció szintjén segítse a diákokat. Ez annyi, mintha a hegymászonak a csúcson szeretnénk megmutatni, hogy melyik hegyet kellene megmásznia. Így tehát a tanításnak elvesztődik az útmutató, kísérő szerepe, hiszen a diák nem ott van, ahol mi mutatjuk neki, hogy merre kellene továbbmenni. Ebben a kontextusban egyértelmű, hogy a tanár feladata segíteni a diákot abban, hogy eljusson arra a szintre, ahová szeretne/szeretnénk, a tanárnak kell megkeresnie azokat az útjelzőket, amelyek a diákhoz közelebb vannak, még akkor is, ha erre korábban egyáltalán nem számított.

A van Hiele típusú keretrendszer mellett fontos elgondolkodnunk a David Tall és Vinner Schlomo (1981) által megfogalmazott fogalom-képzet elméleten is. Ennek a lényegi gondolata az, hogy sem a diákok, sem a tanárok általában nem az absztrakt fogalmakat használják, hanem a fogalmakról kialakított képzeiteket, amelyek sok esetben racionális hibákat tartalmaznak, sok esetben csak a fogalmak kialakításának konkrét kontextusára támaszkodnak, ezért más kontextusban használhatatlanok, vagy egyenesen félrevezetők. Így tehát még akkor is előfordul, hogy a tanár és a diák ugyanazon szavakat másként értelmezi, ha a van Hiele keretrendszer értelmében ugyanazon a szinten vannak, de a szavakhoz társított fogalmakról más képzeitek vannak. Ennek azonnali következményei vannak a tanári munkára vonatkozóan, hisz a tanár-diák kommunikáció esetén fontos ellenőrizni, hogy valóban sikerült-e ezt kivitelezni, és ez az ellenőrzés néha megsokszorozza a ráfordított időt és energiát.

Az előbbieket alátámasztásaként három konkrét tanítási problémát körvonalazunk a matematika területéről (véletlenszerű választás következtében). Az első az *és*, *vagy*, illetve a *következik* szavak használata az általános iskolában. Ebben az oktatási szakaszban a gyermekek formális logikáról, logikai műveletekről nem tanulnak, következésképpen ezek a szavak számukra a köznapi jelentéssel bírnak (ez az intuitív szint). A legtöbb tanár számára ezek logikai műveletek, amelyek sok magyarázat-

Sajnos a tankönyvek, a tananyag, a tanterv is arra van berendezve, hogy a dedukció szintjén segítse a diákokat.

nak a logikai kulcsát képezik. Ha egy gyermek azt mondja, hogy A vagy B, akkor ő majdnem mindig arra gondol, hogy vagy csak A, vagy csak B. Ha viszont egy matektanár mondja, hogy A vagy B, akkor ő általában tudja, hogy teljesülhet A is és B is. Ez amúgy az 5–6. osztályos szintjén fontos a halmazok fejezetnél, ahol az egyesítésnél pontosan a *vagy* lényeges. Egy kolléganőm nemrég rászánt egy matekórát arra, hogy a gyermekeknek lehetőségük legyen felfedezni, hogy két halmazt (az informatika szó betűinek halmazát és a matematika szó betűinek halmazát) hogyan lehet ábrázolni. Azoknak, akiknek erre megvan a megfelelő mentális struktúrájuk, ez nem kérdés, mert kevesebb, mint 20 másodperc alatt lerajzolják a két halmazt, beírják a közös elemeket (i, m, a, t, i, k) és a nem közös elemeket a megfelelő halmazba. A legtöbb matekórán is ez történik, esetleg nem 20 másodperc, hanem 5 perc alatt. A kolléganő a gyermekeknek betűket és két fóliát adott, amelyekre el kellett helyezni a betűket úgy, hogy az egyik fólián legyenek az *informatika* szó betűi, a másikon a *matematika* szó betűi. Egy normál közepes 5. osztályban, további külső segítség nélkül ez 40 percet tartott. Ennyi időre volt szükségük a gyermekeknek arra, hogy rájöjjenek egy mentális struktúrára, amit sok matektanár triviálisnak gondol. Megjegyzem, hogy ezt követően egy matematikatanár képzésen arra kértem a tanárokat, hogy 3 perc alatt rajzoljanak le 4, illetve 5 halmazt általános helyzetben. Sejtettem, hogy iskolai gyakorlatuk során nem volt erre szükségük, tehát nem rendelkeznek előre gyártott mentális modellel, nekik kell kitalálni azt, és ez ennyi idő alatt nem fog menni. Így is történt, a megközelítőleg 60 résztvevő közül talán 2 akadt, aki a 3 perc alatt eljutott addig a felismerésig, hogy mit kellene tükröznie az ábrának. Ez is jó bizonyíték arra, hogy amire nincs mentális struktúránk, arra időt kell szánni, különben esélyünk sincs megérteni.

A második probléma a *becslés* mechanizmusának a teljes hiánya a legtöbb gyermek esetében. Az alapszintű matematikai ismeretek elsajátításához a közhiedelemmel ellentétben nemcsak az egzakt, a pontos számolás készségét kellene a diákoknak elsajátítaniuk, hanem a becslés, a közelítés készségét is, ráadásul olyan körülmények közt, hogy ezt a készséget közvetlen módon a tananyag nem támogatja. Ez ahhoz nélkülözhetetlen, hogy a problémákról alkotott intuitív elképzelésünket, esetleg alapszintű elemzésünket összekössük az informális (vagy formális) dedukció szintjén elvégzett számolással. Ennek az összekötésnek a hiányában a diáktól azt várjuk el, hogy gyakorlatilag az intuitív szinten létező gondolatait ne vegye figyelembe, hanem azonnal ugorjon a dedukció szintjére. A következményekről köteteket lehetne írni, hisz a Murphy-törvények az iskolában

is működnek: amit egy diák elszámolhat, azt elég gyakran el is számolja, amit félreérthet, azt félre is érti, sőt még a megértést is félreérti, vagyis teljesen meg lesz győződve, hogy ő érti a dolgot, miközben halvány sejtelve sem lesz a dolgok működéséről, miértjéről. Az elmúlt években tartott tevékenységek során volt rá példa, hogy az osztálytermet 2 km hosszúnak gondolták a VI. osztályos gyermekek, Kína éves rizstermelését kb. 40 kg-ra becsül-

A második probléma a becslés mechanizmusának a teljes hiánya a legtöbb gyermek esetében.

ték a X. osztályos gyermekek, az A4-es lapon levő nyomtatott szöveg esetén azt gondolták, hogy az kb. 25%-át fedi a teljes felszínnek stb.

A harmadik probléma a *bizonyítással* kapcsolatos tévképzetek. A legtöbb általános iskolába járó diák, de még a középiskolások nagy része is az utóbbi években komoly csapdahelyzetbe került. A tantervből sok esetben kivették a bizonyításokat, vagyis az alaptulajdonságokat nem igazolják az órákon, hanem csak belátják vagy elhiszik (pl. XI. osztályban a határértékek tulajdonságait). Ennek egyik következménye az, hogy a diákoknak teljesen hamis képzeik alakulnak ki arról, hogy mi egy bizonyítás, hogyan kell azt leírni, miért szükséges. Ez természetesen hatással van a feladatmegoldó rutinjukra is, hisz a bizonyítási részek sokkal hiányosabbak, mint a számolási részek. Pl. harmadéves matematika és matematika-informatika szakos hallgatók a VIII. osztályos térmértan feladatok megoldásában rutinszerűen elhagyják az érvelést, csak a számolást végzik el. Ez alátámasztja Usiskin (1982) kutatását, amelyben arra mutatott rá, hogy egyetemi hallgatók is nagyon gyakran megrekednek az informális dedukció szintjén, nem jutnak el a formális dedukció szintjére.

Természetesen mindezekről a problémákról tudunk. Aki olvasott szakdidaktika kutatásokat, látja, hogy egyáltalán nem azon gondolkodunk, hogy az ismert kutatási eredményeket beépítsük a rendszerbe, azt optimalizáljuk, hanem gyakran azon dolgozunk, hogy a meglévő dolgokat úgy módosítsuk, hogy azok ne változzanak. A horizonton létező didaktikai kutatásokból tudjuk, hogy a létező problémák közül sok kiküszöbölhető, hallottunk már csodaiskoláról, alternatív gimnáziumról, láttunk jól működő tehetséggondozó programokat; a legtöbb tanár mégis külső tényezőkben látja a problémákat is és a lehetséges megoldásokat is. Nagyon kevesen vannak azok, akiket egy-egy képzés annyira kimozdít a komfortzónájukból, hogy képesek újragondolni a teljes tanítási stratégiájukat, felvállalják azt, hogy radikálisan újradefiniálják a saját iskolai helyüket és szerepüket. Nemrég 50 matematikatanárral és 15 mesteris hallgatóval készítettem GYELV elemzést<sup>1</sup> a saját tanítási folyamataikra vonatkozóan. Az eredmény több szempontból nagyon izgalmas és tanulságos; itt csak egy szempontot említek meg: a kezdő tanárok esetén a gyengeségek és erősségek egyértelműen a saját belső emberi tulajdonságaikra vonatkoztak, a többéves iskolai tapasztalattal rendelkező tanárok esetén ezek a tulajdonságok döntő többségben a rendszerre vonatkoztak. Ez egyértelműen arra utal, hogy az oktatási rendszerben dolgozók hosszú távon akkor is azonosulnak a rendszerrel, ha napi rendszerességgel tiltakoznak ellene. Ez természetesen nem zárja ki azt, hogy a rendszer előnyeit vagy hiányosságait érzékeljék, de komoly akadályt jelenthet abban, hogy saját tanítási stratégiájukat módosítsák, a különböző képzéseken tanultakat beépítsék a tanítási gyakorlatukba. A tanárok továbbképzésének hatékonyságát az elmúlt 10 évben na-

A horizonton létező didaktikai kutatásokból tudjuk, hogy a létező problémák közül sok kiküszöbölhető.

<sup>1</sup> (Gyengeségek, Erősségek, Lehetőségek, Veszélyek; az angol SWOT elemzés magyar megnevezése)

A tanárok továbbképzésének hatékonyságát az elmúlt 10 évben nagyon sok kutató tanulmányozta.

gyon sok kutató tanulmányozta. Yoon és munkatársai (2007) 1300 tanulmányt azonosítottak, amely a képzés szervezési módja és a képzett tanárok diákjainak eredménye közti összefüggést vizsgálta. Ezek közül 9 tanulmány teljesítette a WWC (What Works Clearinghouse – az AEÁ oktatási minisztériumának oktatáskutató intézete) minőségi kritériumait. Ezek alapján azt a következtetést fogalmazták meg, hogy a megközelítőleg 50 órás képzéseken résztvevő tanárok diákjainak az eredményei 20%-

kal javulnak. Ez így nagyon szépen hangzik, de fontos tudni, hogy az előbbi pozitív összefüggést mutató képzések mindegyike olyan műhelymunkákat tartalmazott, amelyeket a résztvevők folyamatos támogatása követett, annak érdekében, hogy a tanultakat sikeresen alkalmazhassák a napi gyakorlatukban. Ugyanakkor a képzések nagy részében külső szakemberek is részt vettek, és a képzések egy hosszabb időperiódusban zajlottak (pl. több hónapon át többszöri rövidebb találkozásra épültek). Ezzel ellentétben a tanáraink számára szervezett képzések nagy része az előbbi három jellemző egyikével sem rendelkezik, ráadásul az órák száma papíron 30, a valóságban ennél kevesebb. Swan (2011) egy ennél sokkal kifinomultabb modellt ír le. A modell lényege a következő négy fázis tudatos végigjárása (a tervezett tevékenységek alapján):

1. a létező tanári hiedelmek, értékek, gyakorlatok azonosítása (az iskolai problémák közös megbeszélése, tanári reakciók, tanítási problémák megvitatása);
2. a résztvevők gyakorlatától eltérő tanítási gyakorlatok elemzése (kutatási eredmények megvitatása, bepillantás mások által tartott órák részleteibe videó tréning formájában, újszerű tananyagok megvitatása, kipróbálása);
3. a félreértések kiküszöbölése és az új tanítási gyakorlat megtapasztalása (ehhez szükséges egy lokális tanulási közösség és egy mentor, akivel meg lehet vitatni a felmerülő problémákat);
4. a tapasztalatok közös elemzése (a tanárok és mentorok az új tapasztalatok alapján elgondolkodnak a további fejlesztési lehetőségeken).

Egy képzés során lényeges, hogy ezt a négy fázist ciklikusan többször végigjárják a résztvevők, hisz a valódi fejlődés csakis akkor lesz érezhető a tanítási gyakorlatban, ha sikerül túljutniuk a kezdeti nehézségeken, félreértéseken, ha sikerül saját helyzetüket és feladatukat átértelmezni a megváltozott körülmények közt. Az elmúlt 8 évben ezt a modellt személyesen is volt lehetőségem kipróbálni, hisz a PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe) és MASCIL (Mathematics and Science for Life) projektek keretén belül sikerült ebben a szellemben képzéseket kivitelezni. Ezeknek a képzéseknek sokféle tapasztalata van konkrét tananyagok szintjén is, de ugyanakkor általánosabban, a tanítási folyamatra vonatkozóan is. Ezek közül néhányat megemlítek, mert kiemelkedően fontosnak tartom ezeken gondolkodni.

Az alternatív megközelítésre épülő tananyagok átadhatósága sokkal alacsonyabb (legalábbis matematikából) a hagyományos feladatmegoldásra épített tananyagok átad-

hatóságánál. Ezeknél a tananyagoknál annak ellenére, hogy a tanári szerep radikálisan más (az információszolgáltató szerep helyett inkább az edző, segítő szerep kerül előtérbe), mégis sokkal fontosabbá válik a tanárok szakmai felkészültsége és személyisége, hiszen a menet közben felmerülő problémákra szükséges valós időben reagálni. Ezelőtt 20 évvel még bevált, ha a tanár azt mondta, hogy majd a következő órára utánanézi valaminek, de manapság a következő órán előfordulhat, hogy már a diákok nem érdeklődnek a válaszal, esetleg nem is emlékszik az általa feltett kérdésre. Éppen ezért kulcsfontosságú a tananyag minősége, több tanár által, több környezetben való kipróbálása és a tapasztalatok dokumentálása.

A korábban leírt első és második fázis nagyon sok frusztrációt előhoz a tanárokból (rendszerrel, diákokkal, kollégákkal, életminőséggel meg minden egyébvel kapcsolatban). Ahhoz, hogy valaki tanítani tudjon, fontos, hogy a saját frusztrációit kezelni tudja. A tapasztalat azt mutatja, hogy a frusztrációk kezelése egyre fontosabb nemcsak a tanároknak, hanem a diákok számára is. A matematika oktatásában és általában a tanításban az a tanári stratégia, amely a diákokban frusztrációt generál (tudatosan vagy nem), és nem segít a frusztráció feloldásában, egyre kisebb hatékonysággal rendelkezik. Ezt a helyzetet csak súlyosbítja, hogy a diákok nem mindig tudnak különbséget tenni a frusztráció és a kognitív disszonancia közt, ezért gyakran frusztrációként élik meg a saját természetes kíváncsiságukat is, mintegy kiiktatva ezzel a legfontosabb hajtóerőt.

Mindkét probléma kiküszöbölésére (a ritka egyéni megoldásoktól eltekintve) az önálló szakmai csoportok működésének támogatása nyújthat megoldást, amennyiben ezek a csoportok kellő szakmai nyitottsággal rendelkeznek, és hajlandóak szembesülni a valós problémákkal. Az oktatási rendszerünk mindezt nemcsak, hogy nem támogatja, hanem sok tekintetben kifejezetten gátolja is. Éppen ezért fontos, hogy az oktatók tudatosítsák magukban azoknak a szakmai közösségének a fontosságát, amelyeknek a munkájába belekapcsolódhatnak, amelyeknek tagjává válhatnak, és amelyeknek a szakmai sikeréhez hozzájárulhatnak. Mint láthattuk, a horizont jelentősen eltér a valóságtól, ezért jócskán van amerre haladni, fejlődni. Ez akkor is érvényes, ha időközben kiderül, hogy amit a horizonton látunk, az délibáb. Sokunk számára valószínűleg a horizonton észlelt jelenségek nagy részének nincs jelentősége. Ennek ellenére mégis sokan ideális iskoláról, ideális tanárról, ideális diákról, ideális tananyagról, ideális ideákról álmodoznak. Eközben megfelekedeznek, hogy ami ideális, az értelemszerűen nem is lehet reális. A horizont fele való elmozdulás nem arról szól, hogy a horizontot hozzuk közelebb (pl. azzal, hogy átvesszük a finn iskolarendszer szervezési módját), hanem sokkal inkább arról, hogy mi magunk elindulunk a horizont fele vezető úton, nem mérföldes ugrásokkal (mert arra a rendszer tehetetlensége semmiképpen nem ad lehetőséget), hanem sokkal apróbb lépésekkel. Például elkezdünk gondolkodni, hogy tevékenységeink értelemteljesek legyenek, nem a rendszer, az előírások fényében, hanem diákjaink és sa-

A tapasztalat azt mutatja, hogy a frusztrációk kezelése egyre fontosabb nemcsak a tanároknak, hanem a diákok számára is.

ját magunk szemében, esetleg a jövő tükrében. Ez nagyon nehéz, különösen arról a magas lóról nézve, ahol a matematikaoktatásban gyökeret vert tanítási hagyományaink vannak. Éppen ezért „szálljunk le a magas lóról”, nézzünk körül, és próbáljunk reagálni a felbukkanó problémákra. Ahogyan Zsombori Gabriella (2017) fogalmazott: „Nagyon sutba kell vágjuk szép számainkat, és leereszkedjünk végre a fellegekből a reality show kel- lős közepébe.”

### Irodalom

Clements, D. H., és Battista, M.T. (1992): *Geometry and spatial reasoning*. In: D.A Grouws (szerk.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan Kiadó, New York, 420–464.

Swan M. (2011): *Designing Tasks that Challenge Values, Beliefs and Practices: A Model for the Professional Development of Practicing Teachers*. In: Zaslavsky Orit és Sullivan Peter (szerk.) *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics*, Springer US Kiadó, 57–71.

Tall, D., Vinner, S. (1981): *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2): 151–169.

Usiskin, Z. (1982): *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. (Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project.) Chicago, Illinois, University of Chicago.

van Hiele, P. (1986): *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education* (Developmental Psychology Series), Academic Press.

Yoon, K. S., Duncan, T., Lee, S. W.-Y., Scarloss, B. és Shapley, K. (2007): *Reviewing the evidence on how teacher professional development affects student achievement* (Issues & Answers Report, REL 2007–No. 033). Washington, DC: U.S. Department of Education, Institute of Education Sciences, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Regional Educational Laboratory Southwest. Letöltve a <http://ies.ed.gov/ncee/edlabs> honlapról 2017 március 3-án.

Zsombori G. (2017): 18.446.744.073.709.551.615 In: Borsodi László, Bara Katalin: *A csíkszeredai Márton Áron Főgimnázium Évkönyve a 2015–2016. tanévről*, Csíkszereda, 125–131.